TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DEL PIANO

INTRODUZIONE

Per trasformazione geometrica piana si intende una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano, ossia una funzione biiettiva che associa ad ogni punto P del piano un punto P' dello stesso piano. Questo significa che tutti gli elementi dell'insieme A hanno un corrispondente in B e tutti gli elementi dell'insieme B sono immagini di un elemento di A. Queste trasformazioni sono lineari perché le relazioni che legano le coordinate di un punto e del suo corrispondente sono espresse da polinomi di primo grado. Le trasformazioni operano sulle figure geometriche e possono cambiare o no le caratteristiche delle figure. Le trasformazioni vengono classificate secondo le proprietà che non cambiano nella trasformazione, dette proprietà invarianti.

TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE

Le più semplici trasformazioni geometriche sono le trasformazioni isometriche o isometrie. Si definisce isometria una trasformazione del piano che conserva le distanze. Le isometrie si distinguono in dirette e inverse a seconda che mantengano o no l'orientamento fra i punti.

Sono isometrie dirette:

- le TRASLAZIONI, che sono trasformazioni in cui i segmenti che uniscono ogni punto al proprio corrispondente sono congruenti, paralleli e concordi.

  $$t:\ \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

- le ROTAZIONI di centro O, che sono trasformazioni in cui rimane fisso il punto O, detto centro di rotazione, e ogni punto P del piano ha per corrispondente un punto P' tale che le distanze $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$ siano uguali e l'angolo $\widehat{POP'}$ sia congruente a un angolo assegnato di ampiezza α :

  $$\rho:\ \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

- Se l'angolo α è un angolo piatto, la rotazione corrispondente è detta SIMMETRIA CENTRALE, in quanto i punti corrispondenti sono simmetrici rispetto al centro O:

  $$\sigma_O:\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Sono isometrie inverse:

- le SIMMETRIE ASSIALI in cui i punti dell'asse r rimangono fissi e sono detti punti uniti della trasformazione. Ogni punto P del piano ha per corrispondente il punto P' tale che r sia asse del segmento PP'. Fra queste consideriamo le:
  - Simmetrie rispetto all'asse x:

    $$\sigma_x: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

  - Simmetrie rispetto all'asse y

    $$\sigma_y: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI NON ISOMETRICHE

Si definiscono trasformazioni non isometriche quelle trasformazioni che non conservano le distanze fra i punti.

Le SIMILITUDINI

Si definisce similitudine una funzione biiettiva del piano in sé tale che, dati due punti P e Q e i loro corrispondenti P' e Q', fra la distanza dei punti P e Q e quella dei loro corrispondenti P' e Q' sussista la relazione:

$$\overline{P'Q'} = k \cdot \overline{PQ}$$

dove k, reale e positivo, è detto rapporto di similitudine.

Nelle similitudini ogni distanza relativa tra i punti è modificata secondo un fattore costante k.

Se k=1, le distanze rimangono uguali e si ha una isometria: così le isometrie sono un caso particolare di similitudine.

Fra le più semplici similitudini vi sono le OMOTETÌE. Si definisce omotetìa con centro in un punto O del piano, una trasformazione che soddisfa alle seguenti condizioni:

- al punto O corrisponde se stesso;
- ad ogni punto P diverso da O corrisponde il punto P' allineato con O e P, tale che risulti:

  $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ con k reale positivo.

Se k>1, l'omotetìa è una dilatazione; se K<1, l'omotetìa è una contrazione.

Le TRASFORMAZIONI AFFINI

Fissato un sistema di assi cartesiani (non necessariamente ortogonali), si definisce affinità una trasformazione del piano in sé tale che ad ogni punto P(x; y) corrisponde un punto P'(x'; y') le cui coordinate sono date da:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d, e, f \in R \quad \text{e} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Le proprietà caratteristiche dell'affinità sono:

- un'affinità trasforma rette in rette;
- un'affinità trasforma rette parallele in rette parallele e rette incidenti in rette incidenti;
- in un'affinità il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti è eguale al valore assoluto del determinante della matrice della trasformazione.

Trasformazioni Geometriche(2)

Le definizioni che seguono sono generalmente riferite alla sistemazione assiomatica posta da Felix Klein nel famoso trattato di Erlangen. I numeri n] indicano gli invarianti topologici.

Trasformazioni geometriche: funzioni biiettive dello spazio in sé.

Trasformazioni topologiche [luogo - studio]: trasformazioni geometriche che conservano:

1] Dimensionalità (linee in linee, punti in punti ecc.)

2] Carattere delle curve (curve chiuse in curve chiuse, curve aperte in curve aperte)

3] Singolarità (nodi in nodi ecc.)

Trasformazioni proiettive: trasformazioni topologiche che conservano:

4] Le linee rette (rettilinearità)

Trasformazioni affini: trasformazioni proiettive che conservano:

5] Il parallelismo (ma non la direzione delle rette parallele)

Trasformazioni omotetiche: trasformazioni affini che conservano:

6] La direzione

7] Gli angoli

8] Il rapporto tra lati omologhi

Trasformazioni isometriche: trasformazioni affini che conservano:

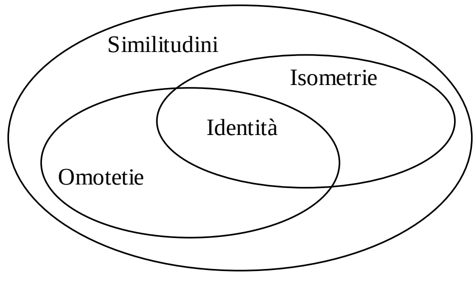
7'] Gli angoli

8'] Le distanze (traslazioni, rotazioni, roto-traslazioni, le simmetrie assiali e centrali)

Trasformazioni simili: trasformazioni affini che conservano la forma

Oss.: Eseguendo una composizione di un'omotetìa con un'isometria, si ottengono le similitudini ossia: similitudine = omotetìa $\odot$ Isometria.

Ovviamente sia le trasformazioni omotetiche sia quelle isometriche rappresentano due sottogruppi delle similitudini. Si osservi più avanti che le isometrie non risultano, in generale, delle particolari omotetìe poiché il coefficiente di dilatazione di un'omotetìa è lo stesso per la x e per la y mentre nelle isometrie tale coefficiente può risultare ± 1.



Le Affinità

Dopo aver introdotto le affinità, ne studieremo il sottogruppo delle similitudini ossia, più in particolare, le omotetìe e le isometrie (traslazioni, rotazioni, simmetrie).

Le affinità: eseguono due stiramenti sulle figure geometriche che possono determinare (anche se ciò può meravigliare) una variazione di angoli e di direzioni.

Le corrispondenti equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = h(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$$

Le omotetìe sono affinità particolari con h = k:

$$\begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$$

Le isometrie sono affinità suddivise in traslazioni, rotazioni e simmetrie (assiali e centrali).